# MATIÈRES À OPTION

## Mathématiques

DURÉE : 3 heures

---

# MATHÉMATIQUES

---

Les parties I, II, III sont indépendantes, à l'exception du I.4° et du II.4°.

P[A] signifie : probabilité de l'événement A.

## I

On définit, pour tout entier naturel K et tout réel $x$ tel que les sommes existent :

$$S_K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n-K}^{K} x^n$$

et $$T_K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^K x^n .$$

1° Déterminer les rayons de convergence de ces deux séries entières.

2° Montrer que pour tout entier naturel K et tout réel $x$ tel que les sommes $S_K$ et $S_{K+1}$ existent :

$$(1 - x)\, S_{K+1}(x) = S_K(x) .$$

En déduire $S_K(x)$ pour tout K.

3° Calculer $T_1$, $T_2$, $T_3$, d'abord en fonction de $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$, puis en fonction de $x$.

Tournez la page S. V. P.

4° Soit $\alpha$ un réel dans $]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans **N** telle que $P[X = n] = (1 - \alpha)\alpha^n$ pour tout entier naturel $n$.

*a.* Calculer l'espérance de X.

*b.* Calculer l'espérance de $X^2$.

*c.* Calculer la variance de X.

## II

**Un joueur décide d'effectuer une partie de « pile » ou « face » avec les règles suivantes :**

— il a gagné dès que « pile » est sorti 2 fois de plus que « face »;

— il a perdu dès que « face » est sorti 2 fois de plus que « pile »;

— la partie n'est interrompue que lorsqu'une des deux éventualités précédentes s'est réalisée.

La pièce est dissymétrique : la probabilité de « pile » à chaque jet est $p$ $(0 < p < 1)$, celle de « face » est $q = 1 - p$. On ne suppose pas que $p = \frac{1}{2}$.

Soit U la probabilité que le joueur gagne la partie, soit V la probabilité qu'il la perde.

1° Soit $n$ un entier naturel. Montrer que la probabilité pour que la partie contienne plus de $2n$ jets de pièce est $\omega^n$ avec $\omega = 2pq$.

2° Montrer que

$$U = p^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \qquad \text{et} \qquad V = q^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n .$$

Calculer U et V. Montrer que la probabilité pour que la partie dure indéfiniment est nulle.

3° Montrer que $U = F(p)$ avec $F(p) = \dfrac{p^2}{1 - 2p + 2p^2}$.

Étudier les variations de F sur $[0, 1]$.

Calculer $F(p) + F(1 - p)$.

Étudier le signe de $F(p) - p$ sur $[0, 1]$.

Calculer la valeur moyenne de $p - F(p)$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, soit

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(p - F(p)\Big)\, dp .$$





4° Soit N la variable aléatoire qui est le nombre de coups contenus dans la partie.

Calculer pour tout entier naturel $n$ : $P[N = 2n + 1]$ et $P[N = 2n]$.

En appliquant I.4° à la variable aléatoire $\frac{N}{2} - 1$, calculer l'espérance et la variance de N.

## III

Les règles de la partie sont modifiées ainsi : le joueur a gagné dès que « pile » est sorti 2 fois de plus que « face », et perdu dès que « face » est sorti 3 fois de plus que « pile ». Soit toujours U et V les probabilités pour qu'il gagne et qu'il perde la partie.

Pour tout entier $n$ on appelle $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$, les probabilités des événements suivants :

— $a_n$ : la partie contient plus de $n$ jets de pièce et à l'issue du $n^e$, il est sorti un « pile » de plus que de « face »;

— $b_n$ : la partie contient plus de $n$ jets de pièce et à l'issue du $n^e$ il est sorti autant de « pile » que de « face »;

— $c_n$ : la partie contient plus de $n$ jets de pièce et à l'issue du $n^e$ il est sorti un « pile » de moins que de « face »;

— $d_n$ : la partie contient plus de $n$ jets de pièce et à l'issue du $n^e$ il est sorti deux « pile » de moins que de « face ».

Soit A, B, C, D les sommes des séries de termes généraux respectifs $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$.

1° Calculer $a_n$, $b_n$, $c_n$, $d_n$ à l'aide de $a_{n-1}$, $b_{n-1}$, $c_{n-1}$, $d_{n-1}$ pour tout entier $n$ positif.

2° Trouver 4 relations entre A, B, C, D. Montrer que $U = pA$ et $V = qD$.

En déduire U et V.

Montrer que la probabilité pour que la partie dure indéfiniment est nulle.

3° Montrer que la partie est équitable $(U = V)$ si et seulement si : $p^4 = (1-p)(1-2p)$ Montrer qu'une seule valeur de $p$ convient.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail